1) $-z > 0 \Rightarrow z < 0$

Así tenemos que

$$-z > 0 \Leftrightarrow z < 0$$

2) $x, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$

3) $x, y > 0 \Rightarrow xy > 0$

4) $x, y < 0 \Rightarrow xy > 0$

5) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$

6) $1 > 0$

7) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

8) $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$

9) $xy > 0 \Rightarrow x, y > 0 \text{ o } x, y < 0$

Así tenemos de 3,4 y 9 que

$$xy > 0 \Leftrightarrow x, y > 0 \text{ o } x, y < 0$$

Demostraciones

1) $-\mathrm{z} > 0 \Rightarrow \mathrm{z} < 0$

Demostración

$-\mathrm{z} > 0$

Aplicamos propiedad de monotonía para la suma

$\Rightarrow (-\mathrm{z}) + \mathrm{z} > 0 + \mathrm{z}$

$\Rightarrow 0 > \mathrm{z}$

Aplicamos la equivalencia entre > y < para obtener la conclusión

2) $x, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$

Demostración

$x > 0 \Rightarrow x + y > y + 0$

$\Rightarrow x + y > y$

Como y>0 tenemos por transitividad la conclusión

Propiedades similares se pueden probar de manera análoga

3) $x, y > 0 \Rightarrow xy > 0$

Demostración

Aplicamos la propiedad multiplicativa para factor positivo *y*

$x > 0 \Rightarrow xy > 0y$ y como $0y=0$

$\Rightarrow xy > 0$

4) $x, y < 0 \Rightarrow xy > 0$

Demostración

Aplicamos la propiedad multiplicativa para factor negativo *y*

$x < 0 \Rightarrow xy > 0y$ y como $0y=0$

$\Rightarrow xy > 0$

5) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$

Demostración

Aplicamos las propiedades anteriores de acuerdo a si $x>0$ o $x<0$

6) $1 > 0$

Demostración

Aplique la proposición anterior con 1 como x

7) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

Demostración

Por absurdo. Suponga que x^{-1} no es positivo.

Así que de la tricotomía o es 0 ó menor a 0

- No puede ser 0 pues sino el producto xx^{-1} sería 0 y vale 1

•Si $x^{-1}<0$ tenemos que aplicando la propiedad de monotonía

$$x > 0 \Rightarrow xx^{-1} < 0x^{-1}$$ Sustituimos ambos lados

$$\Rightarrow 1 < 0$$ Absurdo,

provino de suponer que $x^{-1}<0$

8) $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$

Demostración

Por absurdo. Suponga que x^{-1} no es negativa.

Así que de la tricotomía o es 0 ó mayor a 0.

Sigue de manera similar…

9) $xy > 0 \Rightarrow x, y > 0$ o $x, y < 0$

Demostración

Por la tricotomía $x=0$ ó $x>0$ ó $x<0$. Consideramos los tres casos

- $x=0$. Entonces el producto con y sería cero. Absurdo pues es mayor a 0.

- $x>0$. Aplicamos la propiedad multiplicativa con el factor positivo x^{-1}

$$xy > 0 \Rightarrow x^{-1}xy > x^{-1}0$$

$$\Rightarrow y > 0$$

- $x<0$. Aplicamos la propiedad multiplicativa con el factor positivo x^{-1} $$xy > 0 \Rightarrow x^{-1}xy < x^{-1}0$$

$$\Rightarrow y < 0$$