

$$1) -z > 0 \Rightarrow z < 0$$

Así tenemos que

$$-z > 0 \Leftrightarrow z < 0$$

$$2) x, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$$

$$3) x, y > 0 \Rightarrow xy > 0$$

$$4) x, y < 0 \Rightarrow xy > 0$$

$$5) x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

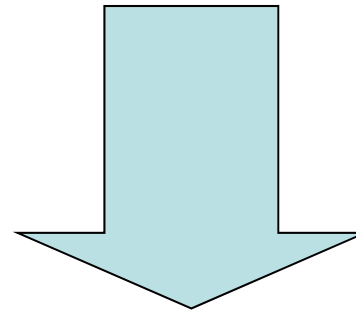
$$6) 1 > 0$$

$$7) x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$$

$$8) x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$$

$$9) xy > 0 \Rightarrow x, y > 0 \text{ o } x, y < 0$$

Demostraciones



Así tenemos de 3,4 y 9 que

$$xy > 0 \Leftrightarrow x, y > 0 \text{ o } x, y < 0$$

$$1) -z > 0 \Rightarrow z < 0$$

Demostración

$$-z > 0$$

Aplicamos propiedad de monotonía para la suma

$$\Rightarrow (-z) + z > 0 + z$$

$$\Rightarrow 0 > z$$

Aplicamos la equivalencia entre $>$ y $<$ para obtener la conclusión

$$2) x, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$$

Demostración

$$x > 0 \Rightarrow x + y > y + 0$$

$$\Rightarrow x + y > y$$

Como $y > 0$ tenemos por transitividad la conclusión

Propiedades similares se pueden probar de manera análoga

$$3) x, y > 0 \Rightarrow xy > 0$$

Demostración

Aplicamos la propiedad multiplicativa para factor positivo y

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow xy > 0y && y \text{ como } 0y=0 \\ &\Rightarrow xy > 0 \end{aligned}$$

$$4) x, y < 0 \Rightarrow xy > 0$$

Demostración

Aplicamos la propiedad multiplicativa para factor negativo y

$$\begin{aligned} x < 0 &\Rightarrow xy > 0y && y \text{ como } 0y=0 \\ &\Rightarrow xy > 0 \end{aligned}$$

$$5) x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

Demostración

Aplicamos las propiedades anteriores de acuerdo a si $x > 0$ o $x < 0$

$$6) 1 > 0$$

Demostración

Aplique la proposición anterior con 1 como x

$$7) x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$$

Demostración

Por absurdo. Suponga que x^{-1} no es positivo.

Así que de la tricotomía o es 0 ó menor a 0

- No puede ser 0 pues sino el producto xx^{-1} sería 0 y vale 1
- Si $x^{-1} < 0$ tenemos que aplicando la propiedad de monotonía

$$x > 0 \Rightarrow xx^{-1} < 0x^{-1} \quad \text{Sustituimos ambos lados}$$

$$\Rightarrow 1 < 0$$

Absurdo,

provino de suponer que $x^{-1} < 0$

$$8) x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$$

Demostración

Por absurdo. Suponga que x^{-1} no es negativa.

Así que de la tricotomía o es 0 ó mayor a 0.

Sigue de manera similar...

$$9) \quad xy > 0 \Rightarrow x, y > 0 \text{ o } x, y < 0$$

Demostración

Por la tricotomía $x=0$ ó $x>0$ ó $x<0$. Consideramos los tres casos

- $x=0$. Entonces el producto con y sería cero. Absurdo pues es mayor a 0.

- $x>0$. Aplicamos la propiedad multiplicativa con el factor positivo x^{-1}

$$xy > 0 \Rightarrow x^{-1}xy > x^{-1}0$$

$$\Rightarrow y > 0$$

- $x<0$. Aplicamos la propiedad multiplicativa con el factor positivo x^{-1}

$$xy > 0 \Rightarrow x^{-1}xy < x^{-1}0$$

$$\Rightarrow y < 0$$