Para x,y positivos

$$x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$$

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

Demostraciones

Para x,y positivos

$$x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$$

Demostración

Usamos que si $x,y>0$ entonces $x+y>0$ y $(x+y)^{-1}>0$

$$x < y \Leftrightarrow x - y < 0$$

Propiedad multiplicativa con $x+y$ y $(x+y)^{-1}$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) < 0(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 < y^2$$

Para x,y positivos $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

Demostración

x^{-1} y y^{-1} son positivos y por tanto el producto también

Aplicamos la propiedad de la monotonía de la multiplicación con el factor positivo $x^{-1}y^{-1}$

$$x < y \Rightarrow x\left(x^{-1}y^{-1}\right) < y\left(x^{-1}y^{-1}\right)$$

Aplicamos la propiedad asociativa en el lado izquirdo y conmutativa en el derecho

$$\Rightarrow \left(xx^{-1}\right)y^{-1} < y\left(y^{-1}x^{-1}\right)$$

$xx^{-1} = 1$ y ley asociativa

$$\Rightarrow 1 \cdot y^{-1} < \left(yy^{-1}\right)x^{-1}$$

$yy^{-1} = 1$

$$\Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$$