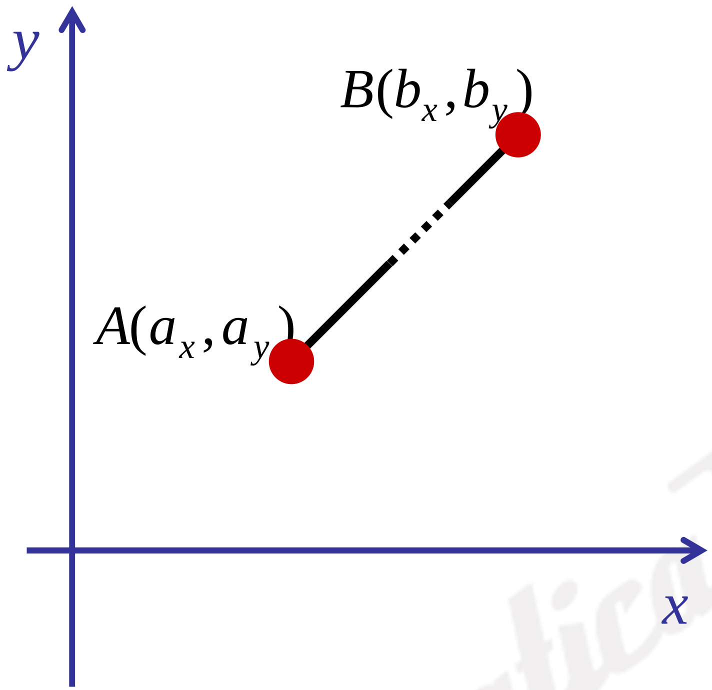
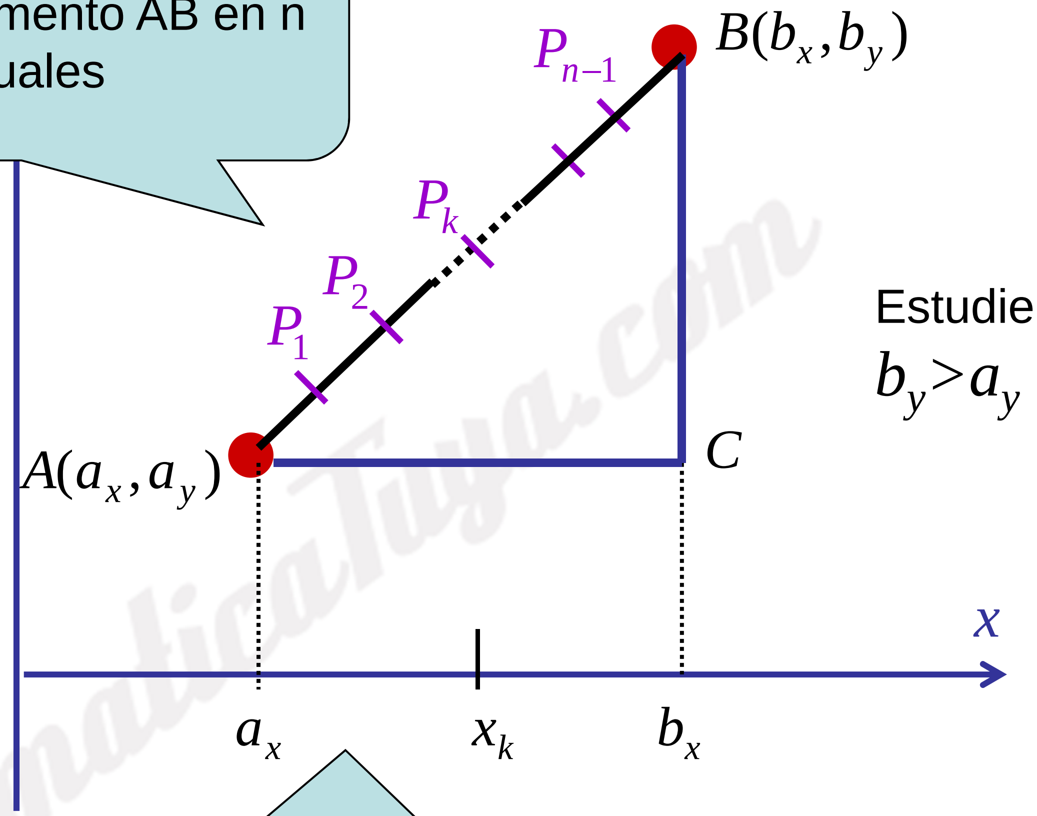


Demostración

A menos que el segmento sea vertical, uno de los puntos está a la izquierda del otro. Supongamos que A está a la izquierda.

Demostración

Llamemos $P_1, P_2, .. P_{n-1}$ los puntos que dividen el segmento AB en n partes iguales



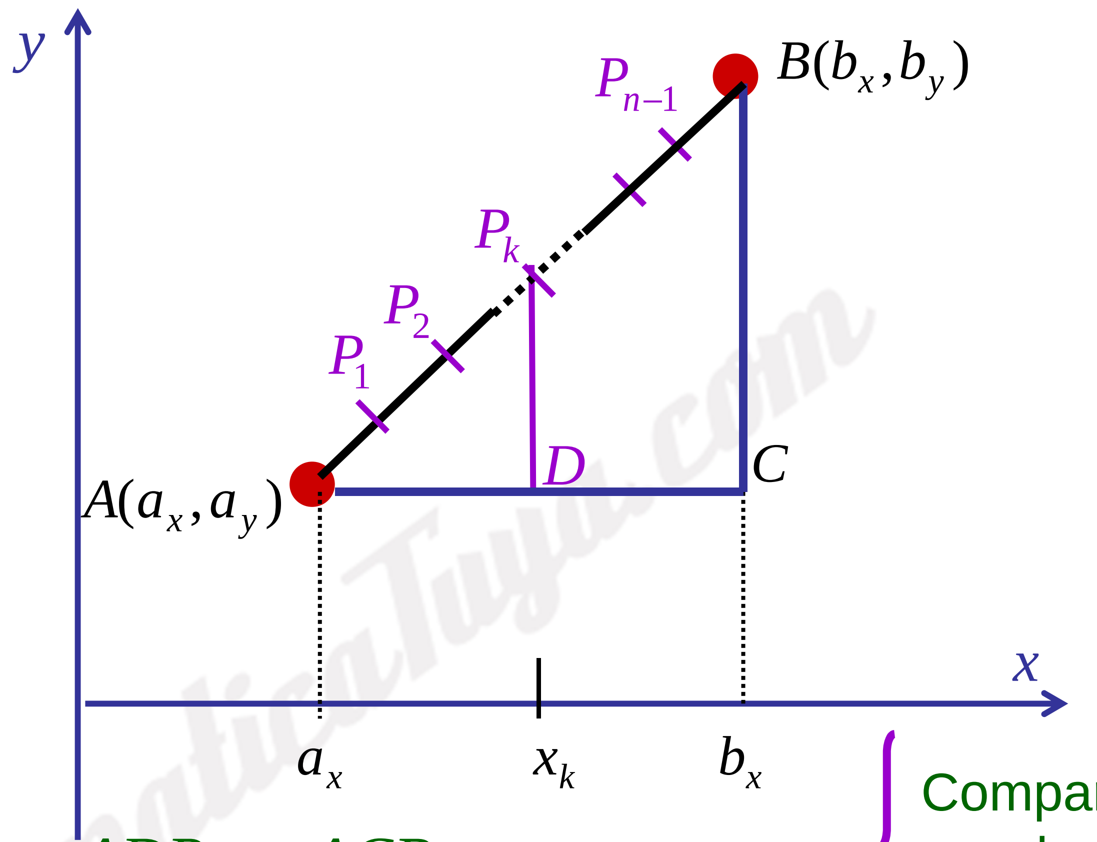
Estudiemos el caso

$b_y > a_y$

Primero veamos la coordenada x de P_k,

…formando un triángulo semejante al triángulo ACB, del cuál sabemos calcular las longitud del segmento AC.

Estamos buscando la coordenada x_k



Los triángulos ADP_k y ACB son semejantes

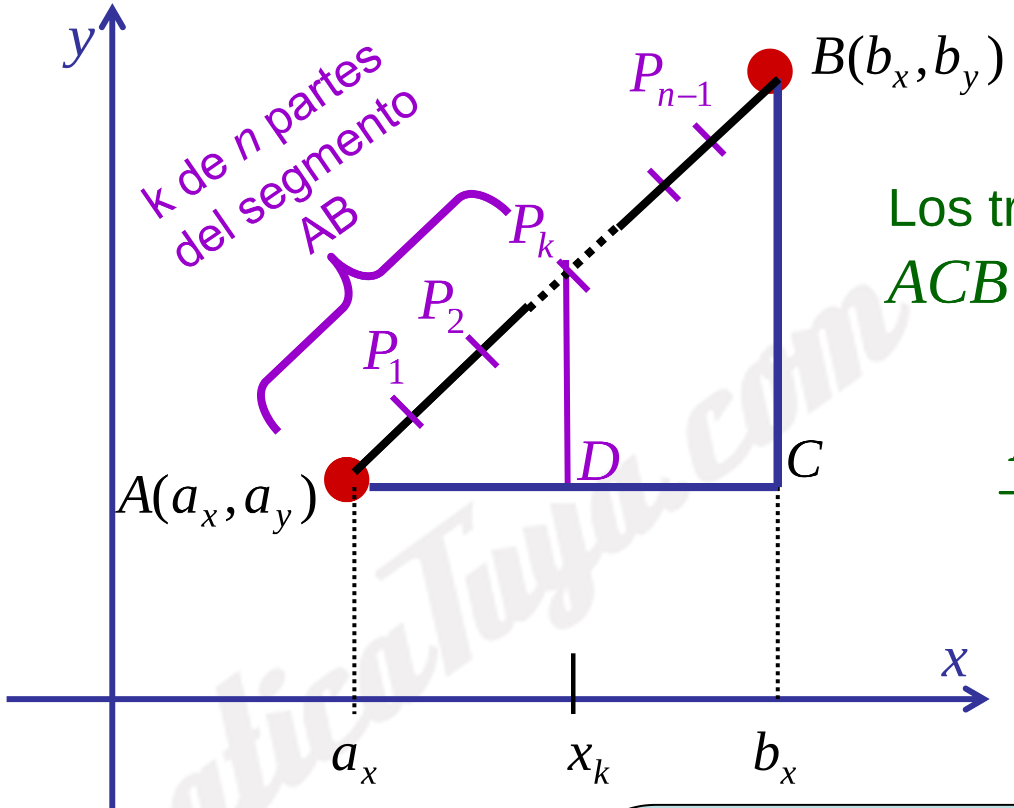
Comparten un ángulo y ambos tienen un ángulo recto

La razón de los lados correspondientes son proporcionales

$$\frac{AP_k}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

La primera razón la podemos determinar usando el hecho que se dividió el intervalo AB en n partes iguales y P*k* es el k-ésimo punto

Estamos buscando la coordenada x_k



Los triángulos ADP_k y ACB son semejantes

$$\frac{AP_k}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

La razón de las hipotenusas las podemos determinar:

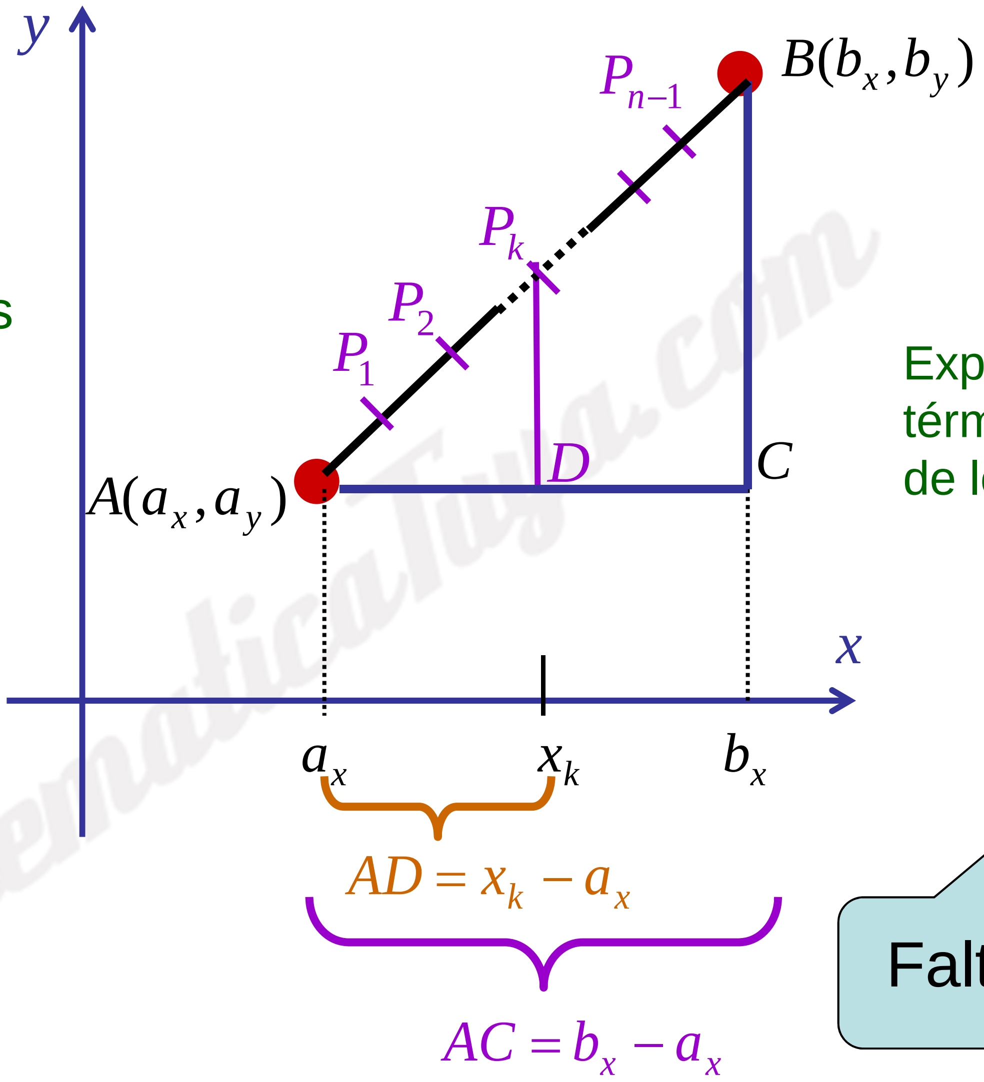
$$\frac{AP_k}{AB} = \frac{\frac{k}{n}AB}{AB} = \frac{k}{n}$$

De la razón de las hipotenusas podemos ver, por semejanzas de triángulos, que las demás razones de los lados correspondientes son iguales a k/n

Estamos buscando la coordenada x_k

Los triángulos ADP_k y ACB son semejantes

$$\frac{AP_k}{AB} = \frac{k}{n}$$



$$\frac{AD}{AC} = \frac{k}{n}$$

Expresamos AD y AC en términos de las coordenadas de los puntos extremos

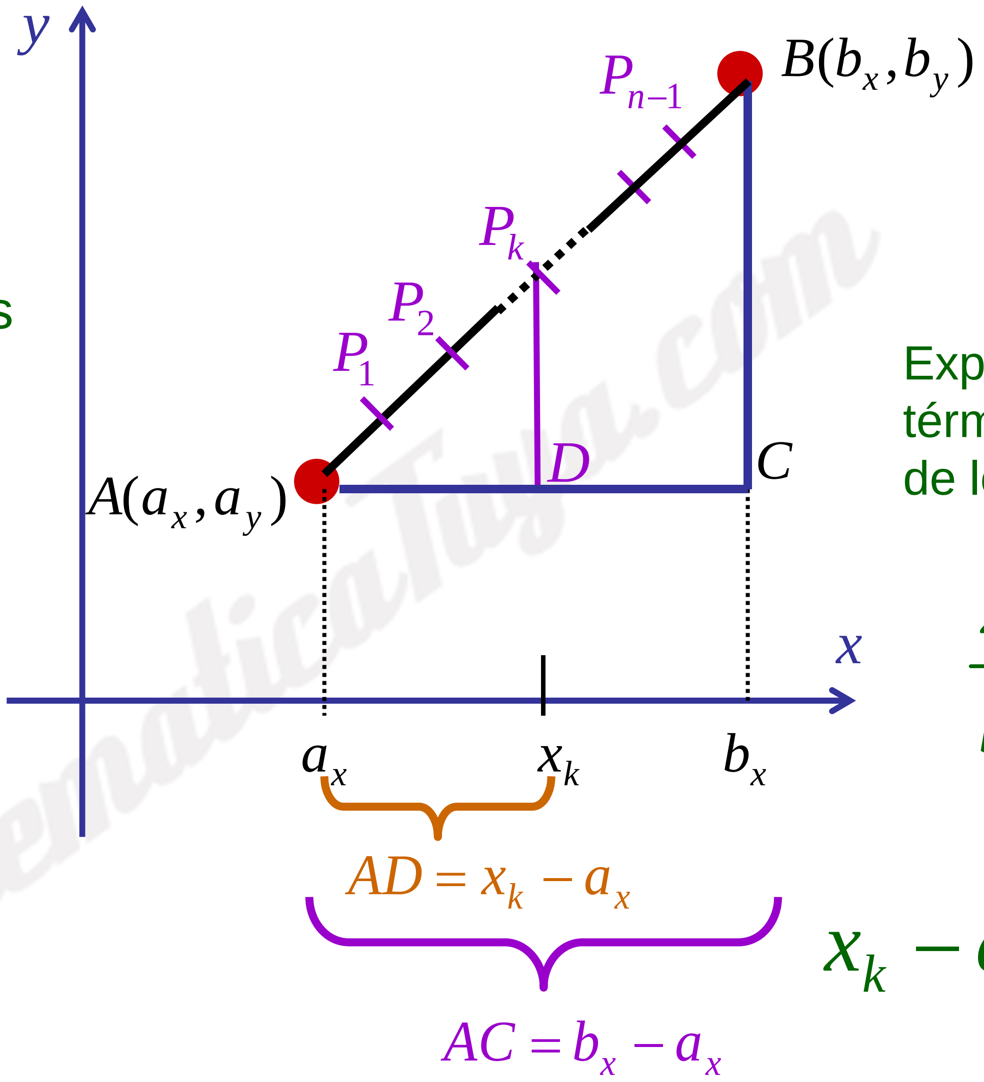
$$\frac{x_k - a_x}{b_x - a_x} = \frac{k}{n}$$

Falta despejar x_k

Estamos buscando la coordenada x_k

Los triángulos ADP_k y ACB son semejantes

$$\frac{AP_k}{AB}=\frac{k}{n}$$



$$\frac{AD}{AC}=\frac{k}{n}$$

Expresamos AD y AC en términos de las coordenadas de los puntos extremos

$$\frac{x_k - a_x}{b_x - a_x}=\frac{k}{n}$$

$$x_k - a_x = \frac{k}{n}\left(b_x - a_x\right)$$

$$x_k = a_x + \frac{k}{n}\left(b_x - a_x\right)$$

Tenemos

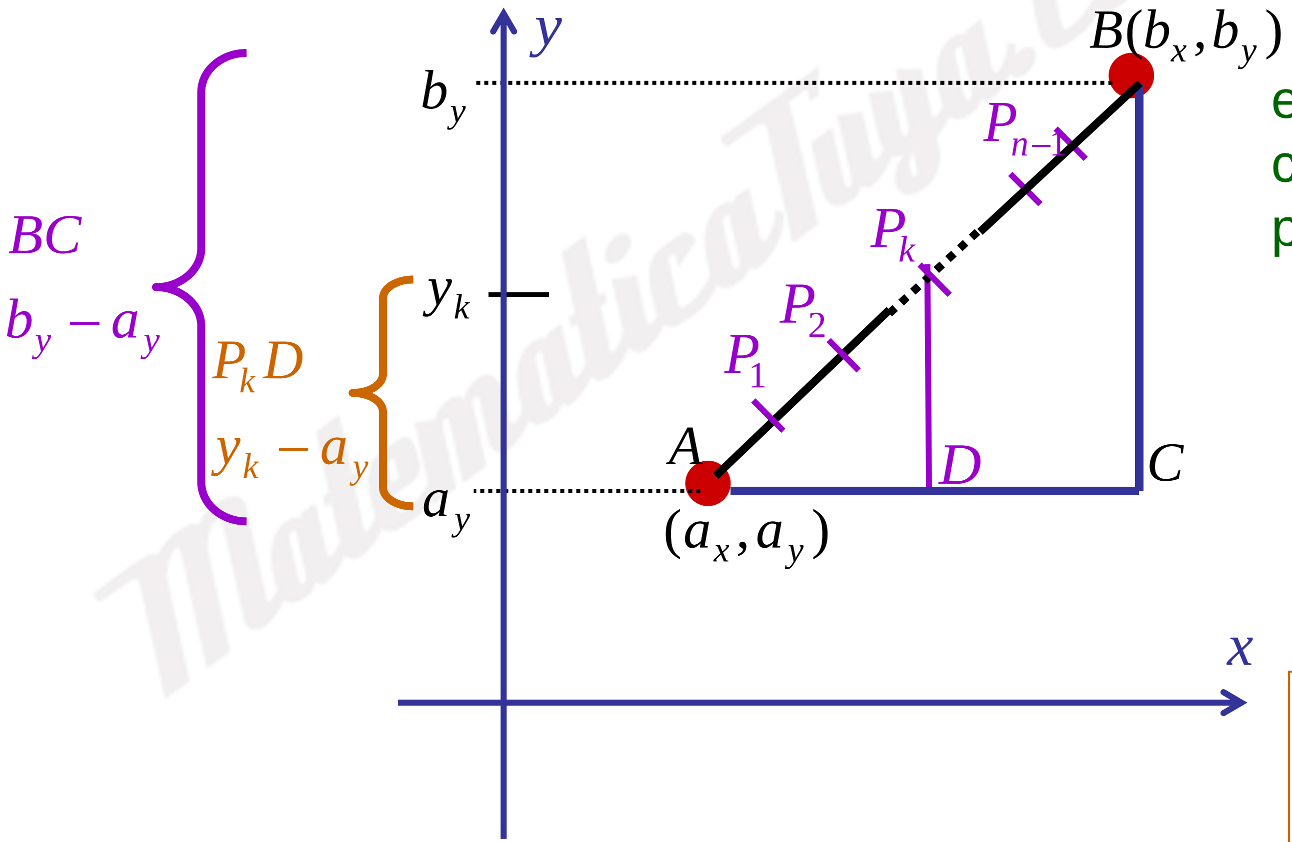
$$x_k = a_x + \frac{k}{n}\left(b_x - a_x\right)$$

Ahora planteamos la razón entre los lados verticales correspondientes a la razón de las hipotenusas que tenemos

Los triángulos ADP_k y ACB son semejantes

y

$$\frac{AP_k}{AB} = \frac{k}{n} \Rightarrow \frac{P_k D}{BC} = \frac{k}{n}$$



Expresamos P_kD y BC en términos de las coordenadas de los puntos

$$\frac{y_k - a_y}{b_y - a_y} = \frac{k}{n}$$

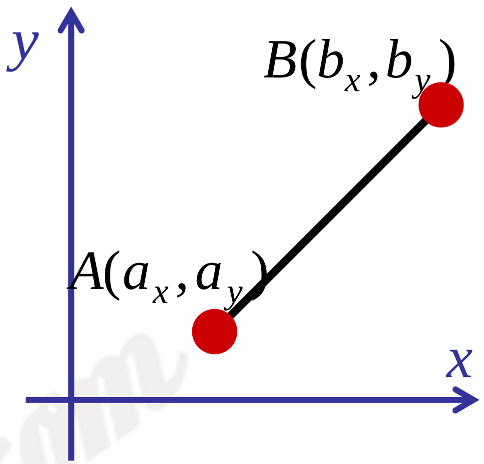
$$y_k - a_x = \frac{k}{n}\left(b_y - a_y\right)$$

$$\boxed{y_k = a_x + \frac{k}{n}\left(b_y - a_y\right)}$$

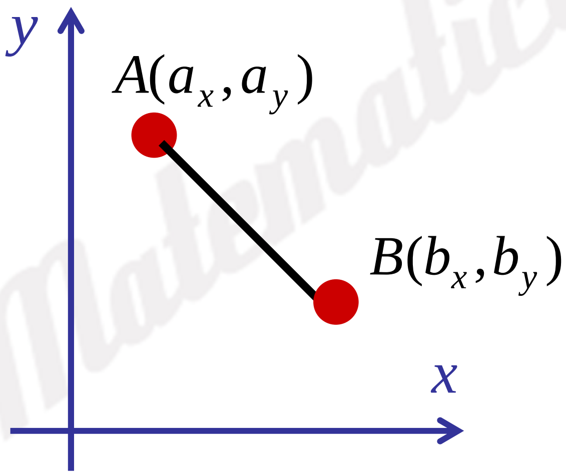
$$x_k = a_x + \frac{k}{n}\left(b_x - a_x\right)$$

$$y_k = a_x + \frac{k}{n}\left(b_y - a_y\right)$$

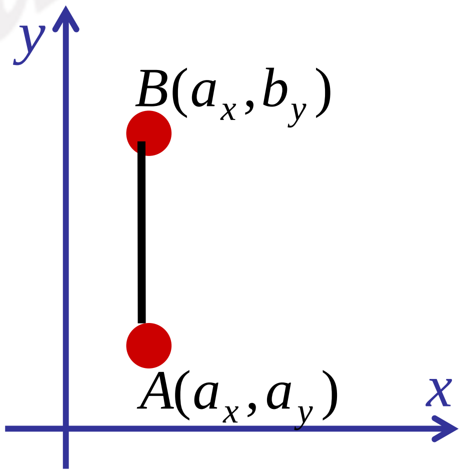
Ya hemos demostrado las fórmulas para el caso $b_y > a_y$



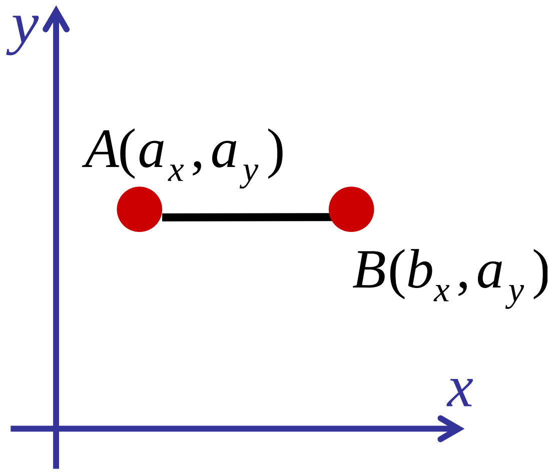
Falta $b_y < a_y$



Los puntos están sobre una vertical



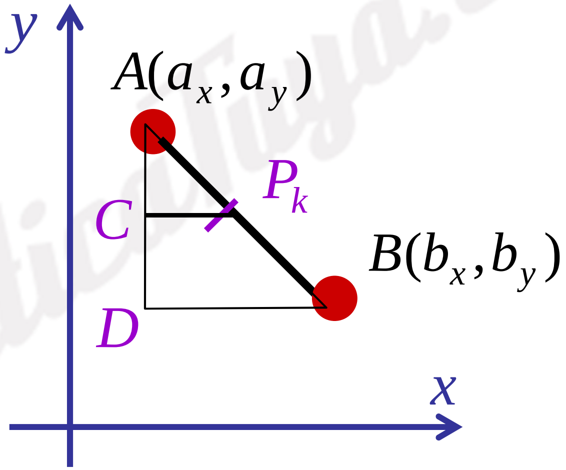
Los puntos están sobre una horizontal



$b_y = a_y \Rightarrow b_y - a_y = 0$

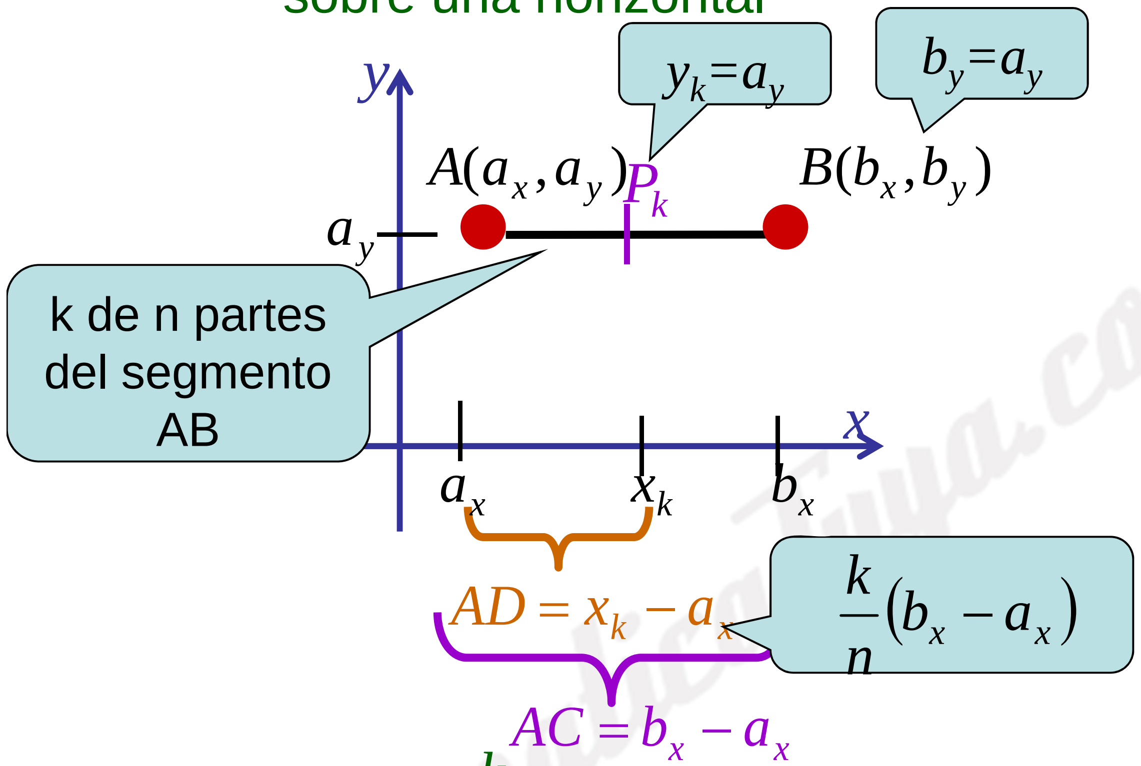
$$y_k = a_y$$

Para $b_y < a_y$ se forman los triángulos semejantes ADB y ACP_k



Luego, se procede de manera análoga

Los puntos están sobre una horizontal



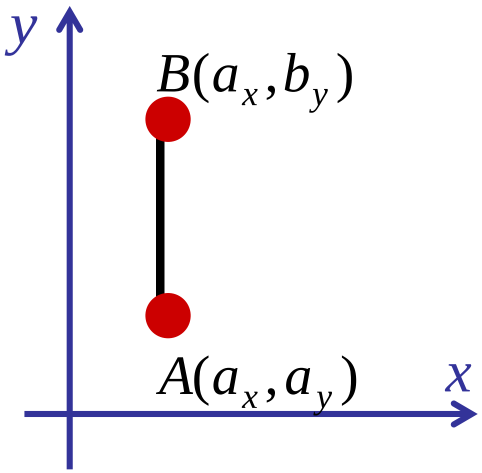
$$x_k - a_x = \frac{k}{n}(b_x - a_x)$$

$$\boxed{x_k = a_x + \frac{k}{n}(b_x - a_x)}$$

$$b_y = a_y \Rightarrow b_y - a_y = 0$$

$$\boxed{y_k = a_y + \frac{k}{n}(b_y - a_y)}$$

Los puntos están sobre una vertical



Se procede de manera análoga al caso horizontal